מועד ב', סמסטר חורף תשע"ט - אלגברה 1/מ, 104016
5.3.19

פתרונות מלאים

ת"ז:

פקולטה:

- משך המבחן: 3 שעות.
- השימוש בחומר עזר כלשהו ובמחשבונים אסור בהחלט.
- רישמו את כל תשובותיכם בדפים אלה. אפשר להשתמש בשני צידי הדף.
- **בשאלות 1-3** יש **לנמק** היטב כל תשובה. **תשובה לא מנומקת לא תחשב**.
  בשאלות 4-8 יש לסמן את התשובה הנכונה בטבלה שבעמוד זה. בכל שאלה יש רק סימון אחד נכון. אם תסומן יותר מתשובה אחת השאלה תיפסל.
- **אין לתת נימוקים בשאלות 4-8.**
- שאלת ש"ב (המהווה גם 5% מגן) היא 3-א'.
- סה"כ ניתן לצבור במבחן 101 נקודות אבל הציון הסופי לא יעלה על 100.

ב ה צ ל ח ה !

טבלה לסימון תשובות נכונות בשאלות 4-8

	שאלה 4	שאלה 5	שאלה 6	שאלה 7	שאלה 8
א.					
ב.					
ג.					
ד.					
ה.					

<u>שאלה מס' 1</u> : (25 נקודות)

יהי $\mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה לכל היותר 2, ויהי $\mathbb{R}^{2\times 2}$ מרחב המטריצות הממשיות מסדר 2×2 מעל $\mathbb{R}$. נגדיר $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}^{2\times 2}$ העתקה לינארית ע"י:

$$T(a+bx+cx^2)=\begin{pmatrix} a+2c & 2a+b+3c \\ a-b+3c & 3a+2b+4c \end{pmatrix}$$

א. (6 נק') מצאו בסיס ומימד לגרעין של T.

ב. (6 נק') מצאו בסיס ומימד לתמונה של T.

ג. (7 נק') יהי $W\subset\mathbb{R}^{2\times 2}$ מרחב המטריצות הסימטריות. הוכיחו כי $\mathbb{R}^{2\times 2}=W+\operatorname{Im}T$. האם סכום זה הוא סכום ישר? נמקו.

ד. (6 נק') תהי $S:\mathbb{R}^{2\times 2}\to\mathbb{R}^{2\times 2}$ העתקה לינארית המוגדרת ע"י: $S(A)=A-A^t$. מצאו בסיס ומימד לתמונה של $S\circ T$.

פתרון שאלה 1:

א. בסיס ומימד לגרעין:

$$T(a+bx+cx^2)=\begin{pmatrix} a+2c & 2a+b+3c \\ a-b+3c & 3a+2b+4c \end{pmatrix}=0$$

$$\begin{cases} a+2c=0 \\ 2a+b+3c=0 \\ a-b+3c=0 \\ 3a+2b+4c=0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} a+2c=0 \\ b-c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2c \\ b=c \end{cases} \Rightarrow KerT=\left\{-2c+cx+cx^2 \,\middle|\, c\in\mathbb{R}\right\}=sp\left\{-2+x+x^2\right\}$$

הקבוצה $\left\{-2+x+x^2\right\}$ פורשת את הגרעין ובלתי תלויה לינארית (כי מכילה רק וקטור אחד ששונה מ-0) ולכן: בסיס לגרעין: $\left\{-2+x+x^2\right\}$ ומימד הגרעין הוא 1.

ב. בסיס ומימד לתמונה: לפי משפט המימדים השני מתקיים:
$\dim\operatorname{Im}T=\dim\mathbb{R}_2[x]-\dim Ker3-1=2$ לכן כל שתי תמונות בלתי תלויות הן בסיס.

$$T(a+bx+cx^2)=\begin{pmatrix} a+2c & 2a+b+3c \\ a-b+3c & 3a+2b+4c \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=$$

$$span\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right\}$$

מימד התמונה 2 לכן כל שניי איברים בלתי תלויים בתמונה יהוו בסיס. $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right\}$ מכילה שתי תמונות בלתי תלויה לינארית לכן בסיס לתמונה.

ג. צריך להוכיח $\mathbb{R}^{2\times2} = W + \operatorname{Im}T$. נוכיח ע"י הכלה ושייוון מימדים. מתקיים $W + \operatorname{Im}T \subseteq \mathbb{R}^{2\times2}$ שכן סכום תתי מרחבים של $\mathbb{R}^{2\times2}$ גם הוא תת מרחב של $\mathbb{R}^{2\times2}$. נמצא מימד של מרחב הסכום: מטריצה סימטרית כללית מסדר 2×2 היא מהצורה: $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. ע"י הוצאת סקלרים נקבל קבוצה פורשת ובלתי תלויה למרחב זה שהיא: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

(בדקו שהיא אכן בלתי תלויה ליניארית). לפי משפט, איחוד בסיסים של $W, \operatorname{Im}T$ יתן קבוצה פורשת למרחב הסכום $W + \operatorname{Im}T$ לכן:

$W + \operatorname{Im}T = span\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right\}$. נדרג את הקבוצה הפורשת לקבלת בסיס:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו: $\dim\left(W + \operatorname{Im}T\right) = 4 = \dim\mathbb{R}^{2\times2}$ מאחר ומימד תת המרחב שווה למימד המרחב כולו הרי שמהכלה ושוויון מימדים קיבלנו: $\mathbb{R}^{2\times2} = W + \operatorname{Im}T$. לפי משפט המימדים הראשון מתקיים: $\dim\left(W \cap \operatorname{Im}T\right) = \dim W + \dim\operatorname{Im}T - \dim\left(W + \operatorname{Im}T\right) = 3 + 2 - 4 = 1 \neq 0$ לכן הסכום הוא לא סכום ישר.

ד. תחילה נמצא איבר כללי של $S \circ T$ ע"י הפעלת S על התמונה של T :

$$S\left(T(a + bx + cx^2)\right) = S\begin{pmatrix} a+2c & 2a+b+3c \\ a-b+3c & 3a+2b+4c \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a+2c & 2a+b+3c \\ a-b+3c & 3a+2b+4c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+2c & a-b+3c \\ 2a+b+3c & 3a+2b+4c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a+2b \\ -a-2b & 0 \end{pmatrix} = (a+2b)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו כי $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ פורשת את $\operatorname{Im}\left(S \circ T\right)$ ובלתי תלויה (וקטור אחד שהוא לא וקטור ה- 0) ולכן בסיס לתמונה ובנוסף: $\dim\left(\operatorname{Im}\left(S \circ T\right)\right) = 1$.

<u>שאלה מס' 2</u> : (20 נקודות)

תהי $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ המטריצה הבאה:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\\-2&-2&-2\end{pmatrix}.$$

א. (5 נק') מצאו את הפולינום האופייני של A, את הערכים העצמיים ואת הריבוי האלגברי והגיאומטרי של כל ערך עצמי.

ב. (7 נק') הוכיחו כי A לכסינה מעל $\mathbb{R}$ ומצאו מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך ש $P^{-1}AP=D$.

ג. (4 נק') הוכיחו כי A דומה ל- A^2-2I.

ד. (4 נק') הוכיחו כי $A^3\in span\{I,A\}$.

בשאלה זו יש לתת פתרון מלא ובסוף לרכז את התשובות במשבצות המתאימות בסוף השאלה.

פתרון שאלה 2:

א. נחשב: $|\lambda I-A|$:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-1\\-2&\lambda-1&-1\\2&2&\lambda+2\end{vmatrix}\underset{R_1\to R_1-R_2}{=}\begin{vmatrix}\lambda+1&-\lambda-1&0\\-2&\lambda-1&-1\\2&2&\lambda+2\end{vmatrix}\underset{C_2\to C_2+C_1}{=}\begin{vmatrix}\lambda+1&0&0\\-2&\lambda-3&-1\\2&4&\lambda+2\end{vmatrix}=$$

$$(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda-3&-1\\4&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+1)\left[(\lambda-3)(\lambda+2)+4\right]=(\lambda+1)\left[\lambda^2-\lambda-2\right]=(\lambda+1)^2(\lambda-2)$$

הפולינום האופייני של A הוא: $(\lambda+1)^2(\lambda-2)$. לכן קיבלנו ערכים עצמיים ממשיים:

$\lambda_1=-1$ מריבוי אלגברי 2;

$\lambda_2=2$ מריבוי אלגברי 1; לפי משפט, ריבוי גיאומטרי קטן או שווה מריבוי אלגברי ולכן ריבוי גיאומטרי יצא גם 1.

נמצא ריבוי גיאומטרי של $\lambda_1=-1$:

$$n-r(-1\cdot I-A)=3-r\begin{pmatrix}-2&-2&-1\\-2&-2&-1\\2&2&1\end{pmatrix}=3-1=2$$

ב. קיבלנו כי לכל ערך עצמי ריבוי אלגברי שווה לריבוי גיאומטרי ולכן A לכסינה מעל $\mathbb{R}$. נמצא וקטורים עצמיים:

עבור $\lambda_1=-1$ נפתור $(I+A)\overline{x}=0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$2a+2b+c=0 \quad \Rightarrow \quad (a,b,c)=(a,b,-2a-2b)=a(1,0,-2)+b(0,1,-2)$$

הווקטורים $\{(1,0,-2),\ (0,1,-2)\}$ פורשים את המרחב העצמי של $\lambda_1=-1$ ולא פרופ' לכן בסיס.

עבור $\lambda_2=2$ נפתור $(2\cdot I-A)\overline{x}=0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b+c=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (a,b,c)=(-c,-c,c)=-c(1,1,-1)$$

הווקטור $\{(1,1,-1)\}$ פורש את המרחב העצמי של $\lambda_2=2$ ושונה מ- 0 לכן בסיס.

מכאן נקבל כי:

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad D=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ג. לפי משפט אם $Av=\lambda v$ אז $p(A)v=p(\lambda)v$ לכל פולינום $p(x)$. בנוסף, אם A לכסינה אז גם $p(A)$ לכסינה (כי n הוקטורים העצמיים נשמרים). לכן, אם נסתכל על $p(x)=x^2-2$ אז מתקיים:
$p(A)=A^2-2I$ לכן גם A^2-2I לכסינה. לפי המשפט, הערכים העצמיים שלה הם:
$p(-1)=(-1)^2-2=-1$ פעמיים וכן $p(2)=2^2-2=2$ פעם אחת כלומר גם $p(x)=x^2-2$ דומה לאלכסונית $D=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ולכן דומה ל- A .

ד. לפי משפט קיילי המילטון כל מטריצה מאפסת את הפולינום האופייני שלה. לפי סעיף א' הפולינום האופייני של A הוא: $(\lambda+1)^2(\lambda-2)=(\lambda^2+2\lambda+1)(\lambda-2)=\lambda^3-3\lambda-2$ ולכן $A^3-3A-2I=0$ או $A^3=3A+2I$.

<u>שאלה מס' 3</u> : (31 נקודות) **סעיף א' בשאלה זו מהווה שאלת ש"ב.**

בשאלה זו 4 סעיפים. הוכיחו את הטענות הבאות או הפריכו ע"י דוגמא נגדית:

א. (10 נק') יהיו $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ שונות מ- 0 המקיימות $AB = 0$. אם C שקולת שורות ל- A אז קיימת D שונה מ- 0 כך ש $CD = 0$.

טענה נכונה: $AB = 0$ לכן עמודות B הן פתרונות למערכת ההומוגנית $A\overline{x} = 0$. נתון כי המטריצה C שקולת שורות ל- A ולכן למערכת ההומוגנית $C\overline{x} = 0$ אותו מרחב פתרונות כמו ל $A\overline{x} = 0$ ולכן עמודות B פותרות גם את המערכת $C\overline{x} = 0$ ולכן גם $CB = 0$. מהנתון, $B \neq 0$ ולכן נבחר $D = B$ ומצאנו $D \neq 0$ המקיימת $CD = 0$.

ב. (7 נק') יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, ויהי $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ בסיס של V. אם $T: V \to V$ אופרטור לינארי כך ש $\{T(v_1)\ ,\ T(v_2)\}$ בסיס לתמונה של T אז $\{v_3\ ,\ v_4\}$ בסיס לגרעין של T.

טענה לא נכונה: דוגמא נגדית. נבחר $V = \mathbb{R}^4$ ונסמן $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ את הבסיס הסטנדרטי של V. נגדיר: $T(e_1) = e_1\ ,\ T(e_2) = e_2\ ,\ T(e_3) = e_1\ ,\ T(e_4) = e_1$ מאחר ו- T מוגדרת על איברי בסיס של V הרי שלפי משפט קיימת העתקה לינארית כזו. עבור העתקה זו, בסיס לתמונה הוא $\{T(v_1)\ ,\ T(v_2)\} = \{e_1, e_2\}$, כי תמונות של בסיס פורשות את התמונה של T לכן אלו פורשים, והם בלתי תלויים לינארית בהיותם חלק מקבוצה בלתי תלויה לינארית (הבסיס E). ועם זאת, $\{v_3\ ,\ v_4\}$ לא בסיס לגרעין. הם אפילו לא בגרעין של T שכן $T(e_3) = T(e_4) = e_1 \neq 0$.

כדאי לשים לב שבדוגמא זו, מימד התמונה הוא 2 ולכן מימד הגרעין הוא 2. שני וקטורים בלתי תלויים לינארית (בדקו) הנמצאים בגרעין ויכולים להיות בסיס לגרעין הם $\{e_1 - e_3\ ,\ e_1 - e_4\}$ כי: $T(e_1 - e_3) = e_1 - e_1 = 0$ ו- $T(e_1 - e_4) = e_1 - e_1 = 0$.

ג. (7 נק') קיימת מטריצה A מסדר 3×3 עם מספרים שלמים המקיימת: $A^2=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&5&5\\2&8&11\end{pmatrix}$.

הטענה לא נכונה. נניח בשלילה שהטענה נכונה, אז מתקיים:

$$\left|A^2\right|=\left|A\right|^2=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&5&5\\2&8&11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&3&2\\0&4&5\end{vmatrix}=1\cdot(15-8)=7$$

כלומר $\left|A\right|=\pm\sqrt{7}$. אבל אם ב- A יש רק מספרים שלמים אז בהכרח הדטרמיננטה היא מספר שלם, כי בחישוב דטרמיננטה מבצעים רק פעולות של חיבור וכפל, וחיבור וכפל של מספרים שלמים הוא בהכרח מספר שלם. קיבלנו סתירה, ומכאן כי מטריצה A כזו לא קיימת.

ד. (7 נק') לכל מטריצה $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ קיימים אינסוף ערכים ממשיים של α כך שהמטריצה $A-\alpha I$ הפיכה.

הטענה נכונה: אם נסתכל על הדטרמיננטה של המטריצה הנתונה, $\left|A-\alpha I\right|$, היא הפולינום האופייני של המטריצה. לפי משפט, זהו פולינום ממעלה n ולכן לפי המשפט היסודי של האלגברה יש לו לכל היותר n שורשים שונים. לכן קיימים לכל היותר n ערכים שונים של α המקיימים $\left|A-\alpha I\right|=0$ ולכל אינסוף הערכים האחרים של α מתקיים $\left|A-\alpha I\right|\neq 0$ כלומר המטריצה $A-\alpha I$ הפיכה.

<u>יש לסמן את התשובה הנכונה לשאלות 4-8 בטבלה שבדף הראשון. נימוקים לא יבדקו.</u>
<u>יותר מסימון אחד יגרור ניקוד 0 על השאלה.</u>

<u>שאלה מס' 4</u>: (5 נקודות)

יהי $f(x)=x^6+ax^4+bx^3$ פולינום עם מקדמים ממשיים ו- $a,b\neq 0$, אזי:

א. ל- $f(x)$ אין שורשים ממשיים פרט ל- 0.

ב. ל- $f(x)$ יש שורש ממשי חיובי.

ג. אם $2+5i$ הוא שורש של $f(x)$ אז גם 4 הוא שורש של $f(x)$.

ד. אם z הוא שורש לא ממשי של $f(x)$ אז $f'(z)\neq 0$.

ה. ל- $f(x)$ אין שורש מריבוי 2.

פתרון שאלה 4:

נסביר כל סעיף:

א. **לא נכון.** $f(x)=x^6+ax^4+bx^3=x^3(x^3+ax+b)$. קיבלנו בתוך הסוגריים פולינום ממעלה 3 עם מקדמים ממשיים. מאחר והמעלה אי זוגית בהכרח יש שורש ממשי אחד נוסף. מאחר ו- $b\neq 0$ הרי ששורש זה הוא לא 0.

ב. **לא נכון.** לפי הנתון $a,b\neq 0$ ולכן זה לא בהכרח. למשל אם $b=2$, $a-2$ אז שורשי הפולינום (פרט ל- 0) הם -2 , $1-i$, $1+i$, ולפולינום אין שורשים ממשיים. שימו לב, למציאת דוגמא נגדית, בוחרים שורש לא ממשי והצמוד שלו (כי המקדמים ממשיים לכן שורשים לא ממשיים באים בזוגות) עם חלק ממשי חיובי ואז השורש הממשי החסר יהיה מספר שלילי שכן סכום כל השורשים (לפי ויאטה) חייב לצאת 0 (כי $a_5=0$).

ג. **לא נכון.** אם $2+5i$ הוא שורש של $f(x)$ אז גם $2-5i$ הוא שורש לפי ההסבר בסעיף ב'. לפי אותו הסבר השורש השלישי והאחרון מקיים: $2+5i+2-5i+x_3=0$ ולכן $x_3=-4$.

ד. **נכון.** אם z הוא שורש לא ממשי אז גם הצמוד שלו הוא שורש והשורש החסר בהכרח ממשי ולכן בהכרח הריבוי של z הוא 1 ולכן לפי המשפט המקשר ריבוי של שורש לנגזרת של הפולינום, נקבל כי $f'(z)\neq 0$.

ה. **לא נכון.** יתכן כי השורים הנוספים הם למשל: $1,1,-2$ ואז 1 הוא מריבוי 2. כמובן שלא יתכן שורש לא ממשי מריבוי 2 (לפי ההסבר בסעיף ד') אבל בהחלט יתכן שורש ממשי מריבוי 2.

<u>שאלה מס' 5</u>: (5 נקודות)

יהיו S_1 , S_2 שתי קבוצות וקטורים לא ריקות ב- $\mathbb{R}^2$. אזי:

א. אם $S_1 \neq S_2$ וגם $S_1 \cup S_2$ בלתי תלויה ליניארית אז $S_1 \cup S_2$ בסיס של $\mathbb{R}^2$.

ב. אם $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ אז $span\{S_1 \cup S_2\} = \mathbb{R}^2$.

ג. אם $v \in span\{S_1\} \cap span\{S_2\}$ אזי $v \in S_1 \cap S_2$.

ד. אם $S_1 \neq S_2$ אזי $span\{S_1\} \cap span\{S_2\} = \{0\}$.

ה. אם $span\{S_1 \cup S_2\} = \mathbb{R}^2$ אזי $S_1 \cup S_2$ בסיס של $\mathbb{R}^2$.

פתרון שאלה 5:

נסביר כל סעיף:

א. **נכון.** הקבוצות לא ריקות (נתון) וכן שונות זו מזו. אם $S_1 \cup S_2$ בלתי תלויה ליניארית הרי שהקבוצה מכילה לפחות 2 וקטורים בלתי תלויים לינארית (כי כל קבוצה חייבת לתרום לפחות וקטור אחד לאיחוד) אבל לא יותר משניים (כי אז הקבוצה הייתה תלויה ליניארית) וכן לא מכילה את וקטור ה- 0 (מאותה סיבה) ולכן בהכרח $S_1 \cup S_2$ היא קבוצה של שני וקטורים בלתי תלויים לינארית ב $\mathbb{R}^2$. מאחר ו- $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ הרי שכל קבוצה המכילה שני וקטורים בלתי לתוים לינארית היא בסיס של $\mathbb{R}^2$.

ב. **לא נכון.** נבחר למשל $S_2 = \{(2,0)\}$, $S_1 = \{(1,0)\}$, אז $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ אבל $span\{S_1 \cup S_2\} = span\{(1,0),(2,0)\} = span\{(1,0)\} \neq \mathbb{R}^2$.

ג. **לא נכון.** ניקח את אותן קבוצות כמו בסעיף ב', אז $v = (3,0) \in span(S_1) \cap span\{S_2\} = span\{(1,0)\}$ אבל $(3,0) \notin v \in S_1 \cap S_2 = \varnothing$

ד. **לא נכון.** אותה דוגמא כמו בסעיף ב', מתקיים: $S_1 = \{(1,0)\} \neq S_2 = \{(2,0)\}$ אבל $span\{S_1\} \cap span\{S_2\} = span\{S_1\} \neq \{0\}$.

ה. **לא נכון. נבחר** $S_2 = \{(2,0)\}$, $S_1 = \{(1,0)\ ,\ (0,1)\}$ אז $span\{S_1 \cup S_2\} = span\{(1,0)\ ,\ (0,1),\ (2,0\} = \mathbb{R}^2$ אבל $S_1 \cup S_2 = \{(1,0)\ ,\ (0,1)\ ,\ (2,0)\}$ לא בסיס של $\mathbb{R}^2$ כי היא קבוצה תלויה ליניארית (כל 3 וקטורים ב $\mathbb{R}^2$ תלויים ליניארית).

<u>שאלה מס' 6</u> : (5 נקודות)

נתונה המטריצה : $A=\begin{pmatrix} 2a_1 & 3b_1 & -c_1 \\ 2a_2 & 3b_2 & -c_2 \\ 2a_3 & 3b_3 & -c_3 \end{pmatrix}$ ונתון כי $\det(A)=36$.

אז $\det\begin{pmatrix} 3a_1 & 3a_2 & 3a_3 \\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 \end{pmatrix}$ שווה ל :

א. 6 ; ב. -6 ; ג. 36 ; ד. -36 ; ה. 20

פתרון שאלה 6:

נתון $\det(A)=\det\begin{pmatrix} 2a_1 & 3b_1 & -c_1 \\ 2a_2 & 3b_2 & -c_2 \\ 2a_3 & 3b_3 & -c_3 \end{pmatrix}=36$. לפי חוקי דטרמיננטה נקבל :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=-6 \text{ לכן } ,\ 36=\begin{vmatrix} 2a_1 & 3b_1 & -c_1 \\ 2a_2 & 3b_2 & -c_2 \\ 2a_3 & 3b_3 & -c_3 \end{vmatrix}\underset{\substack{\frac{1}{2}C_1 \\ \frac{1}{3}C_2 \\ -C_1}}{=}(-1)\cdot 2\cdot 3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=-6\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

עתה, נחשב את הדטרמיננטה המבוקשת :

$$\begin{vmatrix} 3a_1 & 3a_2 & 3a_3 \\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 \end{vmatrix}\underset{\substack{\frac{1}{3}R_1 \\ \frac{1}{2}R_2 \\ -R_3}}{=}(-1)\cdot 2\cdot 3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}\underset{R_2\leftrightarrow R_3}{=}(-1)(-6)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\underset{A=A^t}{=}6\cdot(-6)=-36$$

<u>שאלה מס' 7</u> : (5 נקודות)

תהי A המטריצה הבאה כאשר $\alpha\in\mathbb{R}$:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & \alpha & \alpha \\ 1 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

נתון כי $\lambda=3$ הוא ערך עצמי של A. נסמן ב V_3 את המרחב העצמי של $\lambda=3$ אזי :

א. $\alpha=5$, $V_3=sp\{(1,2,0)\}$.

ב. $\alpha=1$, $V_3=sp\{(-5,2,3)\}$.

ג. $\alpha=5$, $V_3=sp\{(-10,5,4)\}$.

ד. $\alpha=1$, $V_3=sp\{(1,0,3)\}$.

ה. $\alpha=1$, $V_3=sp\{(-2,1,4)\}$.

פתרון שאלה 7:

מהנתון נובע כי $|A-3I|=0$ כלומר: $\det\begin{pmatrix}4-3 & 2 & 0\\ 3 & \alpha-3 & \alpha\\ 1 & -2 & 8-3\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & \alpha-3 & \alpha\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}=0$. לכן:

$$0=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & \alpha-3 & \alpha\\ 1 & -2 & 5\end{vmatrix}\underset{\substack{R_2\to R_2-3R_1\\ R_3\to R_3-R_1}}{=}\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & \alpha-9 & \alpha\\ 0 & -4 & 5\end{vmatrix}=1\cdot\left[(\alpha-9)\cdot 5+4\alpha\right]=5\alpha-45+4\alpha=9\alpha-45$$

$$\alpha=5$$

נפתור את המערכת $(A-3I)\overline{x}=0$ למציאת בסיס למרחב העצמי של $\lambda=3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & 0\\ 3 & 5-3 & 5 & 0\\ 1 & -2 & 5 & 0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 5 & 0\\ 1 & -2 & 5 & 0\end{array}\right)\underset{\substack{R_2\to R_2-3R_1\\ R_3\to R_3-R_1}}{\to}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 5 & 0\\ 0 & -4 & 5 & 0\end{array}\right)\underset{R_3\to R_3-R_2}{\to}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\begin{cases}a+2b=0\\ -4b+5c=0\end{cases}\quad\begin{cases}a=-2b\\ c=\frac{4}{5}b\end{cases}\qquad (a,b,c)=(-2b,b,\tfrac{4}{5}b)=\tfrac{1}{5}b(-10,5,4)=span\{(-10,5,4)\}$$

<u>שאלה מס' 8</u>: (5 נקודות)

יהיו $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ שונות מ- 0 , אזי:

א. אם $rank(A)=rank(B)$ אז $rank(A^2)=rank(B^2)$.

ב. אם $rank(AB)=rank(B)$ אז A הפיכה.

ג. אם $AB=BA$ אז A ו- B דומות.

ד. אם AB סימטרית $AB=BA$.

ה. אם $AB=I-B$ אז $A+I$ הפיכה.

פתרון שאלה 8:

נסביר כל סעיף:

א. **לא נכון.** ניקח למשל: $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ מתקיים $rank(A)=rank(B)=1$ אבל

$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ ולכן $rank(A^2)=1\neq rank(B^2)=0$.

ב. **לא נכון.** למשל נבחר את A ו- B להיות A מהדוגמא בסעיף א', אז

$rank(AB)=rank(A^2)=rank(A)=1$ אבל A לא הפיכה.

ג. **לא נכון.** ניקח $B=\begin{pmatrix}3&0\\0&4\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$ אז $AB=BA$ (מטריצות אלכסוניות מתחלפות בכפל)

אבל A ו- B לא דומות כי, למשל, אין להם אותה עקבה.

ד. **לא נכון**. ניקח למשל את המטריצות מסעיף א׳: $AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ לכן AB

סימטרית אבל $BA=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\neq AB=0$.

ה. **נכון**. נתון $AB=I-B$ או $AB+B=I$ או $(A+I)B=I$ כלומר המטריצות $A+I\,,\,B$ הפיכות כי הן שתי מטריצות ריבועיות אשר מכפלתם היא הפיכה.